УДК 330:4

Илья Алексеевич Голышков
Михаил Витальевич Фуфаев
Научный руководитель: ст. преподаватель к.ф.-м.н. Поляков Николай Львович

Финансовый университет при Правительстве РФ
125993, Москва, Ленинградский просп., 49
golyshkovila@gmail.com, mihailfufaev@mail.ru

ТЕОРЕМА ЭРРОУ, И КАК С НЕЙ БОРОТЬСЯ?

В 1951 году Кеннет Эрроу сформулировал теорему о невозможности. Перед людьми того времени стоял вопрос выбора между демократическим обществом и социалистическим. Кеннет Эрроу своей теоремой определил выбор в сторону социализма. Ответом же демократической стороны стала разработка методов обхода этой теоремы. Одним из них является метод Шульце.

Ключевые слова: теорема Эрроу, предпочтения, критерий Кондорсе, функционал общественного выбора, метод Шульце, эвристика путей.

В устройстве общественной и экономической жизни важную роль играют принципы выработки коллективных решений, в диапазоне которых есть две крайние точки: диктатура и демократия (необходимо понимать, что она не существует в чистом виде). Именно к этому выбору и пришел Кеннет Эрроу в 1951 году, сформулировав теорему о невозможности.

Рассмотрим общую задачу политического выбора. Пусть даны множества $A = \{1;2;3...r\}$ (альтернатив) и $N = \{1;2;3...n\}$ (избирателей). В начале процедуры коллективного выбора каждый избиратель выражает свои предпочтения. Каждое предпочтение есть строгое упорядочение множества альтернатив, причем, вообще говоря, у каждого избирателя порядок альтернатив свой. Априорные предпочтения можно изобразить в виде таблицы. Каждый столбец в данной таблице изображает предпочтения -го избирателя (от лучшего к худшему сверху вниз).

1	2	.....	*n*
a_7	a_2	.....	.
a_4	a_5	.....	.
.	.	.....	.
a_{11}	a_{14}	.....	.

Процесс принятия коллективного решения называется функционалом общественного выбора, и моделируется

отображением $F: P^n \to P$, где P есть множество всех упорядочений множества альтернатив. Для того чтобы заключение теоремы Эрроу было справедливым, должны быть соблюдены следующие требования:

1. Универсальность – для любого набора упорядочений должен успешно произойти процесс агрегации.
2. $|A| \geq 3$.
3. Единогласие – для каждой пары альтернатив $a, b \in A$ если $a > b$ относительно каждого порядка $P_i, 1 \leq i \leq n$, то $a > b$ относительно порядка $P = F(P_1, P_2, ..., P_n)$.
4. Независимость от посторонних альтернатив – это свойство функционала, которое состоит в том, что изменение предпочтений у каждого участника голосования, которое сохраняет взаимное расположение каких-либо альтернатив *a* и *b*, не влияет на взаимное расположение этих альтернатив в агрегированном наборе.

При выполнении этих требований получаем вывод – в системе функционирует диктатор, который сам задает предпочтения, игнорируя остальных, то есть $\exists i \in [1; n]: F(P_1, P_2, ..., P_n) = P_i$.

Одним из способов борьбы с этим выводом является *метод Шульце*. Метод Шульце («метод разъезженного пути») – система голосования, разработанная в 1997 году Маркусом Шульце, которая при объективном подсчете позволяет определить победителя при использовании бюллетеней, в которых голосующие ранжируют свои предпочтения.

Сегодня наиболее употребительной для определения победителя голосования является эвристика пути метода Шульце, основная идея которой есть *концепция косвенных побед*, так называемых путей.

Допустим, что $d[V, W]$ – это число голосующих, которые строго предпочитают кандидатуру *V* кандидатуре *W*. *Путь* это последовательность кандидатур $C(1), ..., C(n)$, где $d[C(i), C(i+1)] > d[C(i+1), C(i)]$. *Сила* пути $C(1), ..., C(n)$ это минимум значения $d[C(i), C(i+1)]$. *Силой сильнейшего пути* $p[A, B]$ от кандидатуры *A* к кандидатуре *B* называется максимум значений силы всех возможных путей от кандидатуры *A* до кандидатуры *B*. Если пути нет – то $p[A, B]$ принимается равной нулю.

Для *косвенной победы* кандидата над кандидатом, должно выполняться одно из этих условий.

- Сила сильнейшего пути от кандидата *A* к кандидату *B* сильнее, чем сила сильнейшего пути от кандидата *B* к кандидату *A*.
- Существует путь от кандидата *A* к кандидату *B*, а пути от кандидата *B* к кандидату *A* не существует.

Косвенные победы удовлетворяют условию транзитивности, т.е. если кандидат A косвенно побеждает кандидата B, а кандидат B косвенно побеждает кандидата C, то кандидат A также побеждает кандидата C косвенно. В эвристике пути используется следующая процедура построения графа путей предпочтения и определение силы путей. Путём силы p от кандидата X до кандидата Y называется последовательность кандидатур $C(1),...,C(n)$ со следующими свойствами:

1. $C(1)$ принимается равным X, $C(n)$ принимается равным Y.
2. Для всех i от 1 до $n-1: d[C(i),C(i+1)] > d[C(i+1),C(i)]$.
3. Для всех i от 1 до $n-1: d[C(i),C(i+1)] \geq p$.
4. Существует i $(1 \leq i \leq n-1): d[C(i),C(i+1)] = p$, где $p = p[X,Y]$.

Кандидатура A является возможным победителем тогда и только тогда, когда $p[A,Z] \geq p[Z,A]$ для каждой другой кандидатуры Z.

Вывод

Открытая в 1951 году теорема Эрроу вызвала большой резонанс в мире. Возник вопрос о невозможности демократии. Благодаря Методу Шульце, политические выборы стали справедливее и появляется возможность демократической системы голосования. Сейчас Метод Шульце становится популярнее и применяется в ряде стран и организаций.

Литература

1. *Arrow K.* Social Choice and Individual Values. 2 edition. – Yale University Press, 1963.
2. *Polyakov N.L., Shamolin M.V.* On a generalization of Arrow's impossibility theorem // Doklady Mathematics. – 2014. – Volume 89. – Issue 3. – Pp. 290-292.
3. *Schulze M.* A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and condorcet-consistent single-winner election method // Social Choice and Welfare, 2011. – V. 36, No 2. – pp. 267–303.

ARROW THEOREM, AND HOW TO FIGHT WITH IT?

Golyshkov Ilya, Fufaev Michael

Financial University under the Government of the Russian Federation125993, Moscow, Leningradskiy Ave.,49;
e-mail: golyshkovila@gmail.com, mihailfufaev@mail.ru

In 1951, Kenneth Arrow formulated the theory about impossibility. The people of that time were faced with the choice between a democratic society and a socialist society. Kenneth Arrow, by his theorem, determined the choice in the direction of socialism. The answer to the democratic side was the development of circumvention methods of this theorem. One of them is the Schulze method.

Keywords: Arrow's theorem, preferences, political choice, public choice functional, Schulze method, path heuristics.

References

1. *Arrow K.* Social Choice and Individual Values. 2 edition. – Yale University Press, 1963.
2. *Polyakov N.L., Shamolin M.V.* On a generalization of Arrow's impossibility theorem // Doklady Mathematics. – 2014. – Volume 89. – Issue 3. – Pp. 290-292.
3. *Schulze M.* A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and condorcet-consistent single-winner election method // Social Choice and Welfare, 2011. – V. 36, No 2. – pp. 267–303.